CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS INTERNE

MARDI 20 JUIN 2023

1ère Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 5 heures – Coefficient : 5

Une composition rédigée en cinq heures sur un sujet d'ordre général relatif à l'évolution des idées et des faits politiques, économiques, sociaux et culturels en France et dans le monde permettant d'apprécier l'aptitude du candidat à exprimer sur le sujet proposé tant une analyse des faits et des évènements qu'une interprétation personnelle et argumentée.

SUJET

- **L'histoire récente de notre société est aussi celle de la dégradation de toutes les solidarités (Edgar Morin)**

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

TROISIEME CONCOURS

MARDI 20 JUIN 2023

1ère Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 5 heures – Coefficient : 5

Une composition rédigée en cinq heures sur un sujet d'ordre général relatif à l'évolution des idées et des faits politiques, économiques, sociaux et culturels en France et dans le monde permettant d'apprécier l'aptitude du candidat à exprimer sur le sujet proposé tant une analyse des faits et des évènements qu'une interprétation personnelle et argumentée.

SUJET

- **Démocratie et progrès.**

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE ET EXTERNE SPECIAL dit «Talents»

MARDI 20 JUIN 2023

1ère Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 5 heures – Coefficient : 5

Une composition rédigée en cinq heures sur un sujet d'ordre général relatif à l'évolution des idées et des faits politiques, économiques, sociaux et culturels en France et dans le monde permettant d'apprécier l'aptitude du candidat à exprimer sur le sujet proposé tant une analyse des faits et des évènements qu'une interprétation personnelle et argumentée.

SUJET

- **Réformer.**

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

JEUDI 22 JUIN 2023

3ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

DROIT PUBLIC

SUJET :

- **L'Etat et le territoire.**

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

JEUDI 22 JUIN 2023

3ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

SANTE PUBLIQUE

SUJET :

- **La santé environnementale et les établissements de santé : quels enjeux ?**

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

JEUDI 22 JUIN 2023

3ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

SCIENCES ECONOMIQUES

SUJET :

- **Assiste-t-on actuellement en France à un retour de l'arbitrage entre inflation et chômage ?**

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

VENDREDI 23 JUIN 2023

4ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

HISTOIRE

SUJET :

- **L'instruction en France au XIXème et XXème siècle.**

des compétences, des communautés, des carrières.

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

VENDREDI 23 JUIN 2023

4ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

LEGISLATION DE SECURITE SOCIALE ET AIDE SOCIALE

SUJET :

- **La prise en charge du handicap.**

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

VENDREDI 23 JUIN 2023

4ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

DROIT HOSPITALIER

SUJET :

- **Etablissements publics de santé et gestion des pénuries.**

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

VENDREDI 23 JUIN 2023

4ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

DROIT CIVIL

SUJET :

- **L'autorité parentale en droit civil.**

des compétences, des communautés, des carrières.

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

VENDREDI 23 JUIN 2023

4ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

SOCIOLOGIE

SUJET :

- **Comment faire de la violence un objet sociologique ?**

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

VENDREDI 23 JUIN 2023

3ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

FINANCES PUBLIQUES

SUJET :

- **Finances publiques et lutte contre l'inflation.**

cng des compétences, des communautés, des carrières.

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

JEUDI 22 JUIN 2023

3ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

MATHEMATIQUES

SUJET : pages 1 à 4

Exercice 1

Partie A

Soit b un nombre réel. La matrice M_b est définie par :

$$M_b = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. L'ensemble $E = \{M_b, b \in \mathbb{R}\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Discuter selon la valeur de b l'inversibilité de la matrice M_b.
3. (a) Justifier sans calcul que la matrice M_b est diagonalisable pour tout $b \in \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_b. On précisera la valeur propre λ associée.
   A quelle condition sur b l'espace propre E_λ associé à la valeur propre λ est-il de dimension 1 ?
   Pour la suite de cette partie, on considèrera que cette condition est vérifiée, et que l'espace propre E_λ est de dimension 1.

   (c) Déterminer une équation cartésienne de $(E_\lambda)^\perp$.
   En utilisant l'orthogonalité des sous espaces propres, en déduire une représentation paramétrique des autres vecteurs propres.

   (d) En considérant l'expression de la trace et du déterminant, montrer que les deux autres valeurs propres sont alors les solutions de l'équation du second degré :

   $$X^2 - (b+4)X + 4b - 2 = 0.$$

   (e) Si b n'est pas réel, la matrice est-elle toujours diagonalisable ?

Partie B

Dans cette partie, on traitera la cas particulier $b = 3$. La matrice $M = M_3$ est donc définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer son polynôme caractéristique.

   (b) En déduire ses valeurs propres avec leurs ordres de multiplicité.

   (c) Déterminer une base de chaque sous espace propre.
2. En déduire une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne n'est constituée que de 1, et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$.
3. Calculer P^{-1}.
4. On souhaite résoudre le système différentiel

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrrr} x'(t) = & 3x(t) & +y(t) & +z(t) \\ y'(t) = & x(t) & +3y(t) & +z(t) \\ z'(t) = & x(t) & +y(t) & +3z(t) \end{array} \right.$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $Y(t) = P^{-1}X(t)$.

(a) Montrer que $Y(t)$ vérifie l'équation $Y'(t) = DY(t)$.

(b) Donner les solution générales des équations différentielles $f' - 2f = 0$ et $f' - 5f = 0$. En déduire une expression de $Y(t)$.

(c) En déduire les solutions du système différentiel (S)

Exercice 2

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

1. Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
2. Montrer que cette convergence est uniforme sur $[0; 1]$.
3. Étude des f_n

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier brièvement que f_n est dérivable et calculer sa dérivée.

   (b) En déduire le tableau de variation de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On précisera les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

   (c) On en déduit que f_n admet un maximum sur $[0; +\infty[$ dont on exprimera en fonction de n la valeur.

   (d) On utilisant la formule de Stirling :

   $$n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n},$$

   justifier que la convergence de f_n est uniforme sur $[0; +\infty[$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

   $$I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

   (a) Justifier que la suite I_n converge vers 0.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$I_n - \frac{1}{e(n+1)!} = I_{n+1}.$$

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}I_n.$$

   (d) En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 3

On admet l'encadrement suivant : $2.7 < e < 2.8$

Partie A :

On considère l'application $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t\ln(t) - t$. On appelle C_f sa courbe représentative dans le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier brièvement que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0; +\infty[$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable ?
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations de f. En déduire que f admet un extremum dont on précisera la valeur.
5. (a) Déterminer les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses. On y précisera l'équation de la tangente.
   (b) En déduire le signe de f.
6. Tracer C_f.

Partie B :

On considère l'application $g :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$

1. Montrer que g est de classe C^1 sur $]1; +\infty[$ et que $g'(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$.
2. Montrer que $G(x) = \int_{x-1}^{x+1} g(t)\mathrm{d}t$ définit bien une primitive de g sur $]1; +\infty[$.
   indication : on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à la calculer
3. (a) Montrer que g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
   (b) Vérifier que $g(2) > 0$.
   (c) Établir que $g(x) = 0$ d'inconnue $x \in]1; +\infty[$ admet une unique solution notée α et que $\alpha < 2$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère l'application $\Phi :]1; +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(x,y) = (y - f(x+1))^2 + (y - f(x-1))^2$$

où f est l'application définie dans la partie A.

1. Le sous-ensemble $]1; +\infty[^2$ est il un ouvert de $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer les dérivées partielles première de Φ sur $]1; +\infty[^2$.
3. Vérifier que $(\alpha, f(\alpha+1))$ est un point critique de Φ, où α est la valeur définie en partie B.
4. Φ admet elle un extremum en $(\alpha, f(\alpha+1))$?

Exercice 4

Soit $\lambda > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(-1)^n}{\lambda n + 1}$.

1. La série $\sum u_n$ est elle absolument convergente ?
2. Vérifier que pour tout entier n,
$$u_n = (-1)^n \int_0^1 t^{\lambda n} \mathrm{d}t.$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\lambda} + r_n \quad \text{avec } r_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{\lambda(n+1)}}{1+t^\lambda} \mathrm{d}t.$$
4. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 0.$$
5. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente et que l'on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\lambda}.$$
6. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
7. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui prend en entrée un nombre entier N et un réel λ et renvoie la valeur de la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{\lambda n + 1}$.

Entrées : un entier N, un réel λ
.....
Pour n allant de 0 à N
$$S \leftarrow S + \frac{(-1)^n}{\lambda n + 1}$$
Fin Pour
Sortie : .....

Quelle valeur obtient-on pour $\lambda = 1$ et $N = 10$?

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

VENDREDI 23 JUIN 2023

3ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

GESTION COMPTABLE ET FINANCIERE DES ENTREPRISES

SUJET : page 1 à 3

Cas énoncés hopitaux 2023

Exercice 1.

L'entreprise Simplex envisage un projet d'investissement dans une infrastructure hospitalière d'une durée de vie de 5 ans. Les travaux d'investissement qui peuvent être réalisés en quelques jours au temps 0 (en KEUR) concernent les éléments suivants :

Type d'immobilisation	Coût	Modalité d'amortissement
Terrain	2 500	non amortissable
Bâtiment	4 000	20 ans en linéaire
Machines	7 000	10 ans en linéaire
Mobilier	1 000	5 ans en linéaire

- les programmes de ventes et de fabrication pour les 5 années d'exploitation sont les suivants :

en KEUR	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires	13 000	14 000	17 000	21 000	22 000
Matières premières	4 550	4 900	5 950	7 350	7 700
Autres frais directs	650	700	850	1 050	1 100
Frais fixes d'exploit.	300	400	400	400	400

- le programme de fabrication prévoit également des besoins en fonds de roulement qui sont supposés être investis au début de l'année pour laquelle ils sont nécessaires :

en KEUR	1	2	3	4	5
Stocks	728	784	952	1176	1232
Clients	910	980	1 190	1 470	1 540
fournisseurs	455	490	595	735	770
BFDR	1 183	1 274	1 547	1 911	2 002

- au terme de la durée de vie, on envisage de mettre l'investissement hors service. A cette époque, les valeurs résiduelles (en KEUR) des immobilisations corporelles sont estimées à :

Immobilisation	Valeur de revente possible
Terrain	3 000
Bâtiment	3 200
Machines	2 500
Mobilier	0

Les montants correspondent à des prix de revente bruts c'est-à-dire avant application des taux d'imposition sur les plus ou moins-values. Les besoins en fonds de roulement sont intégralement récupérables à la fin de la durée de vie de l'activité.

- les modalités de financement du projet sont : 80 % par fonds propres au coût de 13,5 % et 20 % par emprunts au coût de 10,35 %

- l'entreprise est par ailleurs largement bénéficiaire et tout porte à croire qu'elle le restera au cours des prochaines années et, en tout cas, sur la durée de vie de l'investissement. Elle sera ainsi soumise à un taux d'imposition de 33,33 % quelles que soient ses sources de profit (activités normales d'exploitation ou plus-values sur vente d'actifs immobilisés).

Questions :
1) Déterminez le montant des capitaux mis en oeuvre initialement, la durée de vie, les flux annuels de revenus, la valeur résiduelle totale ainsi que le taux d'actualisation.
2) Calculer la valeur actuelle nette, le taux de rentabilité interne et le délai de récupération du capital. (TIR compris entre 33 et 35%)

Exercice 2

Cas Milcom PHARMA (prix de cessions internes)

La société Milcom comprend 3 divisions médicales respectivement nommées Agate, Béryl et Célestite. Agate fabrique 3 produits actifs pour les hôpitaux.

L'Alpha contre la grippe est vendu à l'extérieur de la firme au prix du marché de 95 euros l'unité ; le Beta contre le rhume entre dans la fabrication des produits de Béryl et est vendu à cette division 50 euros l'unité ; le Gamma contre la sclérose rentre dans la fabrication des produits de Célestite est cédé à cette dernière au prix de 45 euros l'unité.

Les productions-ventes mensuelles d'Alpha, Beta et Gamma sont stables depuis des mois et s'élèvent respectivement à 500, 400 et 600 unités de produits actifs.

Ces productions saturent la capacité de production actuelle de la division Agate. La direction générale qui a d'autres priorités en matière d'investissements se refuse à augmenter cette capacité à court ou moyen terme malgré les demandes réitérées de M. Legrand, directeur d'Agate.

Jusqu'en septembre de l'année dernière, le fonctionnement de la société Milcom était assez centralisé et les directeurs de division n'étaient libres ni de leur plan de production ni des prix de leurs produits. Au premier octobre est intervenue une réforme décidée par M. Milcom érigeant chacune des divisions en centre de profit et laissant libres, en principe, les chefs de division de fixer leurs prix.

A la suite de cette réforme, M. Legrand s'interroge sur la réorientation de sa production et/ou sur la modification de ses prix. Le produit Alpha voit son prix fixé par le marché. La division pourrait en doubler les ventes à ce prix-là si elle pouvait en produire suffisamment mais sa capacité de production reste fixée à 900 heures machine par mois dont 500 sont consommées par Alpha, 200 par Beta et 200 par Gamma.

M. Legrand est frappé par la différence de résultat analytique de ses trois produits. Celui d'Alpha est de 20 euros par unité puisque ce produit rapporte 95 euros et que son coût de revient est de 75 euros (50 euros de coût variable et 25 euros de coût fixe imputé à raison de 0,5 euro de coût fixe pour un euro de coût variable).

Le résultat analytique de Beta est de -2,5 euros puisque son coût de revient s'élève à 52,5 euros (35 euros de coût variable unitaire et 17,5 de cout fixe imputé).

Le résultat analytique de Gamma s'élève à 7,5 euros puisque son coût de revient se compose de 25 euros de coût variable et de 12,5 euros de coût fixe imputé.

Sondés discrètement par M. Legrand, les directeurs des divisions Béryl et Célestite s'opposent tous deux à une augmentation des prix des produits qu'ils achètent. Le directeur de Béryl résiste parce que ses marges sont faibles et qu'il trouve que l'avantage de prix dont il bénéficie actuellement par rapport à ce que lui coûterait l'achat d'un substitut de Beta est faible, le substitut étant disponible à 53 euros. Le directeur de la division Célestite menace pour sa part de s'adresser désormais à l'extérieur puisqu'il existe un substitut de Gamma parfait pour ses fabrications au prix de 41 euros.

Que feriez-vous à la place de M. Legrand ? en suivant la méthodologie suivante

1-Calcul de la MCV et des résultats des entités et du groupe avant évolution des volumes et des prix de vente internes
2-Identification de la ressource rare dans le cas Milcom
3-Quelle indicateur calculez pour pouvoir optimiser l'allocation de la ressource rare par produit ?
4-Calcul des nouvelles MCV et du résultat global avec modification des volumes et des prix de vente internes
5-calculs des impacts sur les trois divisions de l'optimisation des volumes et des prix de ventes internes

Exercice 3.

Le comptable de la société Flash, fabricant d'enseignes lumineuses et distributeur de lettres adhésives, vient d'établir le tableau des soldes intermédiaires de gestion d'après la méthode du Plan comptable général pour l'exercice N. Il est présenté plus bas.
Afin d'effectuer une analyse plus pertinente de son activité, la société souhaite effectuer les retraitements préconisés par la Banque de France.
À cet effet, elle vous communique les renseignements complémentaires suivants :
– la consommation de l'exercice en provenance des tiers comprend une redevance pour crédit-bail pour 12 000 € relative à un matériel dont la valeur d'origine est de 44 000 € ; le contrat a été conclu pour quatre ans en N – 2 ;
– le coût du personnel intérimaire pour l'exercice N s'élève à 4 000 €.

Question 1 Indiquez la nature des retraitements et leurs effets sur les soldes intermédiaires de gestion.
Question 2 Calculez les soldes intermédiaires de gestion après retraitements à partir du tableau des soldes intermédiaires de gestion

CONCOURS OUVERTS LES 20, 21, 22 ET 23 JUIN 2023 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

VENDREDI 23 JUIN 2023

4ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

STATISTIQUES

SUJET : page 1 à 3

Concours des directeurs d'hôpital
Examen de Statistique 2023

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Notations et Quantiles

— soit X une variable aléatoire : $\mathbb{E}(X)$ désigne l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance
— le quantile d'ordre 0.975 d'une loi normale centrée réduite est approx. égal à 2

Exercice 1 Probabilités conditionnelles (2 pts)

Dans un lot de 100 dés à 6 faces, 20 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. Nous choisissons un dé au hasard et nous le lançons.

1 (1 pt) On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?

2 (1 pt) On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé ne soit pas truqué ?

Exercice 2 Lois discrètes (3 pts)

Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p.

1 (0.25 pt) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$.

2 (0.25 pt) Déterminer la loi de $1 - X$.
Nous considérons une variable aléatoire Y indépendante de X et suivant une loi de Bernoulli de paramètre q.

3 (0.5 pt) Déterminer la loi de la variable $Z = \max(X, Y)$.

4 (0.5 pt) Déterminer la loi de la variable $S = X + Y$.

5 (0.5 pt) Déterminer la loi de la variable $D = X - Y$.

6 (1 pt) Déterminer la covariance entre les variables aléatoires S et D. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 Lois continues (3 pts)

Soit X une variable aléatoire distribuée suivant une loi uniforme sur $[-1,1]$.

1 (0.5 pt) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2 (0.5 pt) Donner la fonction de répartition de X.

3 (0.5 pt) Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = X^2$.

4 (0.5 pt) Calculer la covariance entre les variables X et Y. Sont-elles indépendantes ?

5 (1 pt) Minorer $\mathbb{P}(|X| \geq 0)$ grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, commenter.

Exercice 4 Probabilités (2 pts)

Nous supposons que la durée (en heures) d'un match de tennis à Roland-Garros suit une loi exponentielle de paramètre 1/2 (densité de probabilité $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{x}{2}\right)$ si $x \geq 0$ et 0 sinon).

1 (0.5 pt) Quelle est la durée moyenne d'un match ?

1 (0.5 pt) Quelle est la probabilité qu'un match dure plus de 30 minutes ?

1 (1 pt) Chaque match compte 1000 spectateurs ayant payés 50 pour y assister. Il est convenu que si un match dure moins de 30 minutes (pour cause de blessure ou défaite expéditive d'un joueur) l'organisation du tournoi rembourse 30 euros à chaque spectateur. Quel gain moyen l'organisation du tournoi obtient-elle pour un match ?

Estimation (5 pts)

Nous considérons la variable aléatoire X admettant pour densité de probabilité

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2\theta}\left[1 + \cos\left(\frac{x\pi}{\theta}\right)\right]\mathbb{I}_{[-\theta,\theta]}(x),$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.

1 (2 pts) Calculer $\mathbb{E}_\theta(X)$ et $\mathbb{E}_\theta(X^2)$.

Nous disposons d'un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de X et nous souhaitons estimer $\tau = \theta^2$.

2 (2 pt) Déterminer $\tilde{\tau}_n$ l'estimateur de τ par la méthode des moments basée sur le moment d'ordre 2.

3 (1.5 pt) $\tilde{\tau}_n$ est-il un estimateur sans biais de τ ?

Exercice 6 Test (2 pts)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, 1)$ et $Y_1, \ldots, Y_n$ un n-échantillon de $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, 1)$. Les deux n-échantillons sont indépendants. Nous souhaitons tester $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Nous utilisons un test ayant pour région critique $\{|\overline{x_n} - \overline{y_n}| > k\}$ où $\overline{x_n} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ et $\overline{y_n} = \sum_{i=1}^n y_i/n$. Pour quelle valeur de k, le risque de première espèce de ce test est égal à 5% ?

Exercice 7 Régression linéaire (3 pts)

On considère le modèle $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + U_i, \quad \mathbb{E}[U_i] = 0, \quad \mathbb{E}[U_i^2] = \sigma^2, \quad \mathbb{E}[U_i U_j] = 0$$

où x_i est scalaire et $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i = 0$.

1 (1 pt) Expliciter l'estimateur des moindres carrés α.

2 (2 pts) Proposer un intervalle de confiance symétrique de niveau asymptotiquement égal à 5% pour le paramètre α ?