CNG

CONCOURS OUVERTS LES 22, 23, 24 ET 25 JUIN 2021 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit « Talents » - INTERNE ET TROISIÈME CONCOURS

VENDREDI 25 JUIN 2021

4ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

STATISTIQUES

SUJET : (3 pages + celle-ci)

Examen de Statistique 2021

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Notations et Quantiles

- soit X une variable aléatoire : $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ désignent respectivement l'espérance et la variance de X
- le quantile d'ordre 0.975 d'une loi normale centrée réduite est approx. égal à 2
- le quantile d'ordre 0.95 d'une loi du χ^2 à 1 degrés de liberté est approx. égal à 4

Exercice 1 Probabilités conditionnelles (1 pt)

Dans un village, 80% des habitants ont un téléphone portable. Parmi eux, 60% ont une connexion internet sur leur téléphone. Nous tirons au hasard un habitant, quelle est la probabilité qu'il ait un téléphone portable sans connexion internet ?

Exercice 2 Lois discrètes (3 pts)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même de loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$ ($p = \mathbb{P}(X_i = 1)$). Soit $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

1 (1 pt) Déterminer la loi de Y_n. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$ en fonction de p.

2 (1 pt) On note $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$. Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$.

3 (1 pt) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à $2p$.

Exercice 3 Couple de variables aléatoires (3 pts)

Nous considérons un couple (X, Y) de variables aléatoires continues réelles de densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} (x+y) & \text{si} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1 (1 pt) Calculer les densités marginales de X et de Y.

2 (1 pt) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4 (1 pt) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = 1/3$.

Exercice 4 Estimation (6 pts)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de X ayant pour densité

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{(k+1)x^k}{\theta^{k+1}} & \text{si } 0 < x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où le paramètre $k > -1$ est connu et θ un paramètre inconnu.

1 (2 pts) Déterminer $\hat{\theta}_n$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. Nous n'oublierons pas que le paramètre θ détermine le support de la loi.

2 (1 pt) En déduire un estimateur sans biais $\theta_n^{\#}$ de θ.

3 (2 pts) Proposer un autre estimateur $\tilde{\theta}_n$ de θ obtenu par la méthode des moments.

4 (1 pt) Comparer $\tilde{\theta}_n$ et $\theta_n^{\#}$.

Exercice 5 Intervalle de confiance (2 pts)

Un sondage sur la popularité du premier ministre indique que 51% des personnes interrogées sont favorables à sa politique. Donner un intervalle de confiance bilatéral symétrique de niveau asymptotiquement égal à 0.95 pour la proportion θ de personnes favorables au premier ministre. Le sondage a été réalisé auprès de $n = 100$ personnes. Même question si $n = 10000$. Commenter.

Exercice 6 Test (2 pts)

Nous désirons savoir s'il existe, dans une population d'individus atteints d'une pathologie, un lien entre le sexe de l'individu et ses chances de guérison. Nous menons une enquête sur 10000 individus et obtenons les résultats ci-dessous

sexe /statut	guéris	non guéris
femme	2400	2600
homme	3000	2000

Étudier le lien entre les variables sexe et statut, on pourra utiliser un test d'hypothèse associé à un risque de première espèce asymptotiquement égal à $\alpha = 0.05$.

Exercice 8 Régression linéaire (3 pts)

Nous analysons la diminution de la concentration d'un médicament dans le sang. Au temps 0, moment juste après l'injection, le patient a une concentration de 10 pg/ml de sang. Nous postulons le modèle linéaire suivant

$$Y = 10 + \beta \times x + \epsilon$$

où est Y est une variable aléatoire qui représente la concentration dans le sang et x est le temps écoulé, exprimée en minutes, après l'injection.

Nous observons

Temps écoulé (minutes)	10	20	30	40	50	60
Concentration (pg/ml)	9.5	7.5	7.5	5.5	5.5	4

Nous obtenons $\sum_{i=1}^{5} x_i(y_i - 10) = -910$ et $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 9100$.

1 (1 pt) Donner la valeur de l'estimation des moindres carrés de β.

2 (0.5 pt) Donner la prédiction de la concentration après une durée de 70 minutes.

3 (1.5 pt) Chaque observation ayant été obtenue à partir de patients différents, nous supposons que les variables aléatoires correspondantes sont indépendantes. Nous postulons en outre que le résidu ϵ_i associé à Y_i est distribué suivant une loi normale centrée réduite.

Donner un intervalle au niveau de risque de 5% pour la prédiction de la concentration effectuée à la question précédente.