Centre National de Gestion

CONCOURS OUVERTS LES 11, 12, 13 et 14 juin 2019
POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'ETABLISSEMENTS SANITAIRES, SOCIAUX ET MEDICO-SOCIAUX

CONCOURS INTERNE, EXTERNE et 3ème CONCOURS

3ème EPREUVE D'ADMISSIBILITE
(Durée 4 heures – Coefficient 3)

Jeudi 13 juin 2019

MATHEMATIQUES

SUJET :

Le sujet comporte 4 pages + celle-ci.

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Exercice 1. *(4 points)*

On notera I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. On définit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis $B = I - 2A$.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B^n = I + u_n A$.
   (b) Résoudre l'équation $x = 3x - 2$. On note s l'unique solution.
   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ donnée par $v_n = u_n - s$ est géométrique et déterminer sa raison.
   (d) En déduire une expression de B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. On pose $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, et $\mathcal{E} = Vect(I, J)$, i.e. $\mathcal{E}$ est le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par I et J.
   (a) Vérifier que (I, J) est une base de $\mathcal{E}$.
   (b) Que vaut J^2 ?
   (c) Trouver les matrices M de $\mathcal{E}$ solutions de l'équation (E_1) : $M^2 = I$, puis de l'équation (E_2) : $M^2 = M$.
   (d) Les puissances B^n de B appartiennent-elles à $\mathcal{E}$ pour $n \in \mathbb{N}$?
   Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de B^n en fonction de I, J et n.

Exercice 2. *(6 points)*

On pourra admettre les résultats de la partie I dans la partie II.

Partie I

On souhaite dans cette partie (re)démontrer que l'ensemble des solutions sur $[0,1]$ de l'équation différentielle (D) : $y''(t) = y(t)$ est

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto Ae^{-t} + Be^{t}; A, B \in \mathbb{R}\}.$$

1. Vérifier que toute fonction $y \in \mathcal{S}$ est solution de (D).
2. On fixe maintenant une fonction $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ que l'on suppose solution de (D).
   (a) On définit $X : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Montrer que X est solution de l'équation $(D_0) : X' = AX$ où A est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer le polynôme caractéristique de A, en déduire que A est diagonalisable. Diagonaliser A, c'est à dire expliciter des matrices P, $\Delta \in M_2(\mathbb{R})$ telles que P soit inversible, Δ diagonale et $A = P\Delta P^{-1}$.
   (c) Calculer P^{-1} puis $P \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}$.
   (d) Conclure que $y \in \mathcal{S}$.

Partie II

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que $(f,g) = \int_0^1 (fg + f'g')(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
2. On pose $U = \{f \in E; f'' = f\}$ et $V = \{f \in E; f(0) = f(1) = 0\}$.
   (a) Montrer que U et V sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (b) Montrer que U et V sont orthogonaux. Que vaut $U \cap V$?
   (c) Dans cette question le but est de montrer que U et V sont des espaces supplémentaires dans E, i.e. que tout f s'écrit de manière unique sous la forme $f = u + v$ avec $u \in U$ et $v \in V$.
   On fixe une fonction $f \in E$.
      i. Vérifier que si $f = u + v = u' + v'$ avec $u, u' \in U$ et $v, v' \in V$ alors $u = u'$ et $v = v'$.
      ii. On suppose que $f = u + v$ avec $u \in U$, $v \in V$. En utilisant la partie I, montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $u(t) = Ae^{-t} + Be^{t}$ pour $t \in [0,1]$. Calculer ensuite A et B en fonction de $f(0)$ et $f(1)$.
      iii. Conclure.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $E_{a,b} = \{f \in E; f(0) = a, f(1) = b\}$. On souhaite calculer

$$I = \inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 (f^2(t) + (f')^2(t))dt.$$

   (a) Si $f \in E_{a,b}$ s'écrit $f = u + v$ avec $u \in U$, $v \in V$, montrer que $(f,f) \geqslant (u,u)$.
   (b) Calculer I.

Exercice 3. *(3 points)*

Pour $n \geqslant 2$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{n^{x+1}}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On note $S : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$ sa somme.
2. On admet que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente.
   (a) Pour $n \geqslant 2$ fixé, étudier le signe de la dérivée de f_n. En déduire que f_n admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$ et le calculer.
   (b) A-t-on la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$?
   (c) Montrer que si $a > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.
   (d) Établir que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4. *(7 points)*

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur l'espace $\mathbb{R}^2$.

1. (a) Établir le tableau de signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto 4t - t^2$.

   (b) On considère la fonction $f : [0,2] \to \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{4t - t^2}$. Établir son tableau de variation.

2. On note $\Gamma = \{(t, f(t)); t \in [0,2]\}$ le graphe de la fonction f, et on note $\mathcal{C}$ le cercle (dans $\mathbb{R}^2$) de centre $(2,0)$ et de rayon 2.

   (a) Montrer que si $t \in [0,2]$, on a $\|(t, f(t)) - (2,0)\| = 2$. Que cela signifie-t-il par rapport à Γ et $\mathcal{C}$?

   (b) Dessiner Γ dans un repère orthonormé. *On mettra t en abscisse, y en ordonnée.*

3. Pour $u \in \mathbb{R}$ on note (D_u) la droite d'équation $y = ut$.

   (a) Tracer (D_1), (D_2) sur le graphique précédent.

   (b) Pour $u \in \mathbb{R}$, calculer les coordonnées du point d'intersection de (D_u) avec $\mathcal{C}$ qui n'est pas l'origine $(0,0)$. *On donnera les coordonnées en fonction de u.*

4. On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{t+1}{\sqrt{4t-t^2}} dt$.

   (a) Calculer la dérivée de l'application $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, u \mapsto \frac{4}{1+u^2}$. La dérivée s'annule-t-elle ?

   (b) Calculer $f \circ g$.

   (c) Montrer que g induit une bijection de $[1, \sqrt{3}]$ sur $[1,2]$.

   (d) En faisant le changement de variable $t = g(u)$, montrer que

   $$I = \int_{\sqrt{3}}^{1} \frac{\frac{4}{1+u^2} + 1}{\frac{4u}{1+u^2}} . \frac{-8u}{(1+u^2)^2} du.$$

   (e) On pose $J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+u^2)^2} du$ et $K = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2} du$. Montrer que $I = 8J + 2K$.

   (f) i. Faire le changement de variable $u = \tan(\theta)$ pour obtenir

   $$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(\sqrt{3})} \cos^2(\theta) d\theta$$

   ii. *On rappelle la formule de linéarisation suivante :* $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$. On pose $\alpha = \arctan(\sqrt{3})$. Montrer que $J = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\pi}{4} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} - \frac{1}{2}\right)$.

   (g) Calculer I.