CNG

CONCOURS OUVERTS LES 5, 6, 7 et 8 juillet 2021
POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'ETABLISSEMENTS SANITAIRES, SOCIAUX ET MEDICO-SOCIAUX

CONCOURS EXTERNE, EXTERNE SPECIAL dit « Talents »
INTERNE et 3ème CONCOURS

3ème EPREUVE D'ADMISSIBILITE
(Durée 4 heures – Coefficient 3)

Mercredi 7 juillet 2021

MATHEMATIQUES

SUJET :

Le sujet comporte 5 pages + celle-ci.

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Exercice 1. *(8,5 points)*

On utilise les notations suivantes dans l'exercice : l'ensemble des matrices réelles à m lignes et n colonnes est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$, la transposée d'une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est notée $M^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, *i.e.* on a $\langle w, w' \rangle = w^T.w' = \sum_{i=1}^n w_i.w'_i$ pour $w = (w_i)_i, w' = (w'_i)_i \in \mathbb{R}^n$, et on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne : $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle} = \sqrt{w^T.w} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}$.
On note I_n la matrice identité de taille n. Enfin la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est notée $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Partie I

1. *(0,5 pt)* Soit $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. Calculer la matrice carrée $w.w^T$.
2. On définit la matrice (dite de Householder)
$$H_w = I_3 - \frac{2}{\|w\|^2} w.w^T.$$
   (a) *(0,5 pt)* Montrer que H_w est symétrique.
   (b) *(0,25 pt)* Que vaut $H_w^T.H_w$? La matrice H_w est-elle orthogonale ?
3. Soit F l'orthogonal de w dans $\mathbb{R}^3$, *i.e.* $F = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle w, x \rangle = 0\}$.
   (a) *(0,25 pt)* Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) *(0,5 pt)* Que vaut $Vect(w) \cap F$?
   (c) *(0,5 pt)* Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x - \alpha w \in F$.
   (d) *(0,5 pt)* En déduire que tout élément x de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique $x = y + z$ avec $y \in Vect(w)$ et $z \in F$.
   (e) *(0,25 pt)* Quelle est la dimension de F ?
4. (a) *(0,5 pt)* Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^3$ on a : $w.w^T.x = 0$ implique $\|w^T.x\| = 0$.
   (b) *(0,5 pt)* En déduire que pour $x \in \mathbb{R}^3$ on a $H_w x = x$ ssi $x \in F$.
   (c) *(0,25 pt)* Pour $y \in Vect(w)$ et $z \in F$, calculer $H_w(y + z)$ en fonction de y et z.
   (d) *(0,5 pt)* Soit s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F. Que vaut la matrice de s dans la base canonique ?
   (e) *(0,25 pt)* La matrice H_w est-elle diagonalisable ?

Partie II

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On souhaite trouver les vecteurs $x \in \mathbb{R}^2$ qui minimisent la quantité $\|Ax - b\|$.

1. Dans cette question on suppose qu'on a trouvé une factorisation $A = QR$ avec $Q \in M_3(\mathbb{R})$ orthogonale et $R \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ de la forme $R = \begin{pmatrix} R' \\ \hline 0 \ 0 \end{pmatrix}$ avec $R' \in M_2(\mathbb{R})$ inversible.
   (a) *(0,5 pt)* Justifier que pour $x \in \mathbb{R}^2$ on a $\|Ax - b\| = \|Rx - Q^T b\|$.
   (b) *(0,5 pt)* Montrer que $\|Rx - Q^T b\|^2 = \|R'x - b'\|^2 + c$ pour un vecteur $b' \in \mathbb{R}^2$ et une constante $c \in \mathbb{R}$ bien choisis (indépendants de x).
   (c) *(0,5 pt)* En déduire les x qui minimisent $\|Ax - b\|$ en fonction de R' et b'.
2. On établit maintenant la factorisation $A = QR$ à l'aide de la partie I.
   (a) *(0,25 pt)* Soit $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculer $w = v - \|v\| e_1$.
   (b) *(0,5 pt)* Calculer $H = H_w$.
   (c) *(0,25 pt)* Calculer $R = HA$.
   (d) *(0,25 pt)* En déduire une factorisation $A = QR$ comme dans la question 1.
3. *(0,5 pt)* Trouver les x qui minimisent la quantité $\|Ax - b\|$.

Exercice 2. *(4,5 points)*

Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, \frac{x}{x+y})$, où on a posé $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. (a) *(0,5 pt)* Soit $(x, y) \in U$. On pose $(s, t) = \varphi(x, y)$. Exprimez x et y en fonction de s et t.

   (b) *(0,5 pt)* En déduire que φ est injective sur U.

   (c) *(0,25 pt)* Montrer que $\varphi(U) \subset V$ où $V = \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[$.

   (d) *(0,5 pt)* Montrer que φ induit une bijection de U sur V.

   (e) *(0,25 pt)* Calculer la bijection réciproque φ^{-1} de φ sur V.

   (f) *(0,5 pt)* Calculer la jacobienne $J_{\varphi^{-1}}(s, t)$ en un point $(s, t) \in V$, puis son déterminant $\det(J_{\varphi^{-1}}(s, t))$.

2. On note
$$f : U \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{-(x+y)}xy.$$

   (a) *(0,25 pt)* Pour $b \in]0, +\infty[$, calculer $\int_0^b e^{-x}xdx$.

   (b) *(0,25 pt)* En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-x}xdx$.

   (c) *(0,5 pt)* En déduire la valeur de l'intégrale double $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x, y)dxdy$.
   On rappelle que $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x, y)dxdy = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x, y)dx\right)dy$.

3. On note
$$g : V \to \mathbb{R}, (s, t) \mapsto e^{-s}s^3t(1 - t).$$

   (a) *(0,5 pt)* Montrer que pour $(s, t) \in V$, $g(s, t) = f\left(\varphi^{-1}(s, t)\right)\left|\det\left(J_{\varphi^{-1}}(s, t)\right)\right|$.

   (b) *(0,5 pt)* En déduire la valeur de l'intégrale double $\int_0^{+\infty}\int_0^1 g(s, t)dtds$.

Exercice 3. *(5 points)*

On fixe trois fonctions $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, où $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On note $E = Vect(f_1, f_2, f_3)$ l'espace vectoriel engendré par f_1, f_2, f_3.

On suppose dans tout l'exercice que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

1. (a) i. *(0,5 pt)* Soit $x, a_2, a_3 \in [0,1]$. Écrire le développement du déterminant $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & f_3(a_2) \\ f_1(a_3) & f_2(a_3) & f_3(a_3) \end{vmatrix}$ par rapport à la première ligne.

   ii. *(0,5 pt)* En déduire qu'il existe un triplet $(a_1, a_2, a_3) \in [0,1]^3$ tel que la matrice
$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & f_3(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & f_3(a_2) \\ f_1(a_3) & f_2(a_3) & f_3(a_3) \end{pmatrix}$$
soit inversible.

   Dans la suite on fixe un tel triplet (a_1, a_2, a_3).

   (b) On définit $N : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \sum_{i=1}^{3} |f(a_i)|$.

   i. *(0,5 pt)* On suppose que $N(f) = 0$ pour une fonction $f \in E$.
   Montrer qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & f_3(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & f_3(a_2) \\ f_1(a_3) & f_2(a_3) & f_3(a_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   En déduire que $f = 0$.

   ii. *(0,5 pt)* Montrer que $N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$ pour $f, g \in E$.

   iii. *(0,5 pt)* Montrer que N est une norme sur E.

2. On suppose que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E, qui converge simplement vers une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

   (a) *(0,5 pt)* Montrer que pour $i \in \{1,2,3\}$, la suite $(g_n(a_i))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

   (b) *(0,5 pt)* En déduire que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme N.

   (c) *(0,5 pt)* En déduire que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $h \in E$ pour la norme N.

   (d) *(0,5 pt)* On note N_∞ la norme sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ donnée par $N_\infty(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers h pour la norme N_∞.

   (e) *(0,5 pt)* En déduire que $h = g$ et que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $[0,1]$.

Exercice 4. *(2 points)*

On souhaite trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$(E) : y' = \frac{2t}{1+t^2}y - 1.$$

1. *(0,5 pt)* Résoudre l'équation homogène associée

$$(E_0) : y' = \frac{2t}{1+t^2}y.$$

   Montrer que les solutions sont de la forme $t \mapsto C.y_0(t)$ où y_0 est une fonction que l'on précisera et C est une constante réelle arbitraire.

2. *(0,5 pt)* Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y(t) = C(t).y_0(t)$ où l'on suppose que $t \mapsto C(t)$ est une fonction dérivable.
3. *(0,5 pt)* Conclure.
4. *(0,5 pt)* Calculer la solution de (E) qui prend la valeur 0 en $t = \frac{\pi}{4}$.