CNG

**CONCOURS OUVERTS LES 29 ET 30 SEPTEMBRE ET LES 1er ET 02 OCTOBRE 2020
POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

CONCOURS EXTERNE – INTERNE ET TROISIÈME CONCOURS

JEUDI 1ER OCTOBRE 2020

3ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

MATHEMATIQUES

SUJET : pages 1 à 5

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Exercice 1.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_n - 1 = \int_0^1 -\frac{t^n}{1+t^n} dt$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|I_n - 1| \leqslant \int_0^1 t^n dt$.
3. Conclure que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
4. On souhaite étudier la différence $I_n - 1$.
   (a) Soit $n \geqslant 1$. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \frac{1}{n}\ln(1+t^n)$ sur $[0,1]$.
   (b) Montrer que pour $n \geqslant 1$,
   $$1 - I_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n) dt.$$
   On fera une intégration par parties.
   (c) i. Dériver la fonction $\varphi : z \mapsto z - \ln(1+z)$ sur $[0,1]$.
   ii. En déduire que pour tout $z \in [0,1]$ on a $\ln(1+z) \leqslant z$.
   (d) Conclure que
   $$\frac{1 - I_n}{\frac{\ln(2)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exercice 2.

Pour $n \geqslant 1$ on note I_n la matrice identité de taille n et

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Partie I

1. Vérifier que $v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre -1.
2. Résoudre l'équation $(A + I_3).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v_1$.

   On note $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ l'unique solution telle que $x_2 = -3$. Expliciter v_2.
3. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.
4. En déduire que A admet deux valeurs propres, -1 et une valeur propre λ à préciser.
5. Quelle est l'ordre de multiplicité de -1 dans le polynôme χ_A ?
6. Trouver un vecteur propre pour la valeur propre λ.
   Expliciter v_3, l'unique vecteur propre pour λ ayant 1 pour première composante.
7. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. (a) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A pour matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$.
   Exprimer $u(v_1)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3. Faire de même pour $u(v_2)$ et $u(v_3)$.

   (b) Que vaut la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$?

   (c) On note P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs v_i : $P = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right)$.
   Montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie II

Soient $K = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire K sous la forme $K = -I_2 + N$ avec $N \in M_2(\mathbb{R}^2)$.

2. Calculer N^2.

3. Montrer que pour $m \geqslant 0$ on a $K^m = (-1)^m I_2 + (-1)^{m-1} m N$.
On pourra utiliser la formule du binôme de Newton pour les matrices : si $M, M' \in M_n(\mathbb{R})$ vérifient $M.M' = M'.M$ alors pour $m \geqslant 0$,

$$(M + M')^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} .M^i.(M')^{m-i}.$$

où $\binom{m}{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!}$ est le coefficient binomial.

4. Montrer par récurrence sur $m \geqslant 0$ que $J^m = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{K^m}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

5. (a) On fixe a_0, b_0, $c_0 \in \mathbb{R}$, et on définit les suites $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}, (b_m)_{m\in\mathbb{N}}, (c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} a_{m+1} = -a_m + 8b_m + 2c_m \\ b_{m+1} = -a_m - b_m + c_m \\ c_{m+1} = 8b_m + c_m \end{cases}.$$

Montrer que pour $m \geqslant 0$ on a

$$\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix} = P J^m P^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

où P est la matrice définie dans la partie I.

(b) On donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
En déduire une expression de a_m en fonction de a_0, b_0, c_0 et m.

Exercice 3.

On note $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $F = Vect(e_0, e_1)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions

$$e_0 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 \end{array}$$

et

$$e_1 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t \end{array}.$$

Pour $f, g \in E$, on note $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

1. Vérifier que si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2, g \in E$, on a $< \alpha f_1 + f_2, g >= \alpha < f_1, g > + < f_2, g >$.
2. (a) Soit $t_0 \in [0,1]$. On suppose que $h \in E$ est positive et vérifie $h(t_0) > 0$.
   i. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $t \in [0,1] \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $h(t) \geqslant \frac{h(t_0)}{2}$.
   ii. En déduire que $\int_0^1 h(t)dt > 0$.

   (b) Montrer que si $f \in E$, on a $\int_0^1 f^2(t)dt = 0$ implique $f = 0$.
3. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E. On note $\| \cdot \|$ la norme correspondante.
4. (a) Calculer $\|e_0\|$.

   (b) Montrer que e_0 n'est pas orthogonal à e_1.

   (c) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $e_1' = e_1 - \alpha e_0$ soit orthogonal à e_0.

   (d) Calculer $\tilde{e}_1 = \frac{e_1'}{\|e_1'\|}$.

   (e) Vérifier que $(e_0, \tilde{e}_1)$ est une base orthonormale de F.
5. Soit $u \in E$. On souhaite déterminer le projeté orthogonal $p(u)$ de u sur F, c'est-à-dire l'unique élément de E tel que $\left\{ \begin{array}{l} p(u) \in F \\ u - p(u) \in F^{\perp} \end{array} \right.$.

   (a) Expliquer pourquoi $p(u)$ s'écrit $\beta_0 e_0 + \beta_1 \tilde{e}_1$ avec $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$.

   (b) Calculer β_0 et β_1 en fonction de $< p(u), e_0 >$ et $< p(u), \tilde{e}_1 >$.

   (c) Déduire que $p(u) =< u, e_0 > e_0 + < u, \tilde{e}_1 > \tilde{e}_1$.
6. On prend maintenant $u(t) = e^t$.

   (a) Calculer $< u, e_0 >$ et $< u, \tilde{e}_1 >$.

   (b) En déduire $\|u - p(u)\|^2$.

   (c) Que vaut $d(u, F) = \inf_{v \in F} \|u - v\|$?

Exercice 4.

Soit $\varphi :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2$ donnée par $\varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.
On note $U =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$.
On rappelle que la fonction tan est donnée par $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, et qu'elle est bijective de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, de bijection réciproque arctan.

1. Calculer la jacobienne $J_\varphi(\rho,\theta)$ de φ pour tout $(\rho,\theta) \in U$.
2. Calculer le déterminant de la jacobienne sur U.
3. La fonction φ est-elle de classe C^1 sur U ?
4. Montrer que φ est injective sur U.
5. Montrer que φ est une bijection de U sur $V = \mathbb{R}^2\backslash\{(x,0); x \in \mathbb{R}_-\}$.
6. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Trouver une expression de $\varphi^{-1}(x,y)$ en fonction de x et y.